جامعة البعث — امتحانات الفصل الأول ٢٠١٧-٢٠١٨ — المدة : ساعة ونصف

كلية العلوم — أسئلة مقرر التحليل الطبيعي (٢) — العلامة: (١٠٠) درجة

قسم الرياضيات — لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي — الاسم : [illegible]

السؤال الأول (١٥ درجة):

أثبت أن كل مجموعة محدودة $M \subset E^n$ شبه متراصة (في حالة كان E حقيقي فقط) .

السؤال الثاني (١٥ درجة):

ليكن $A : B \to B$ مؤثر خطي ومتراص من فضاء بناخ في نفسه . أثبت أن نصف القطر الطيفي يعطى بالعلاقة :

$$r_{\sigma(A)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

السؤال الثالث (١٥+١٠=٢٥ درجة):

أ)- أثبت أنه إذا كان الفضاء الخطي المنظم X متراصاً فإنه يكون تاماً وفصولاً .

ب)- ليكن $A : B \to B$ مؤثر خطي ومحدود من فضاء بناخ في نفسه بيّن أن $\sigma(A) \neq \phi$.

السؤال الرابع (٢٠ درجة):

لتكن متتالية المؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث $A_n : \ell_2 \to \ell_2$ المعرفة بالشكل :

$$A_n(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, 0, \ldots)$$

أثبت أن هذه المتتالية متراصة ، ولكن نهايتها $\lim_{n\to\infty} A_n$ مؤثر غير متراص . هل مؤثر النهاية مع مؤثر التماثل هو : مؤثر إسقاط أو مؤثر موجب أو مؤثر إيزومتري .

السؤال الخامس (١٠+١٥=٢٥ درجة):

١)- ليكن $A : B \to B$ مؤثر خطي ومحدود من فضاء بناخ في نفسه أثبت أنه إذا كان A^{-1} موجوداً وينتمي إلى $L(B, B)$ فعندئذٍ $\sigma(A^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} \; : \; \lambda \in \sigma(A) \right\}$.

٢)- عرف ما يلي : نظيم هيلبرت شميث للمؤثر A ، ثنائي الخطية المحدود .

انتهت الأسئلة

حمص ١٦ / ١ / ٢٠١٨ م — مع التمنيات بالنجاح والتوفيق — مدرس المقرر: الدكتور سامح العرجه

جامعة البعث | سلم تصحيح أسئلة مقرر التحليل التابعي (٢) | المدة : ساعتان
كلية العلوم | امتحانات الفصل الأول ٢٠١٧-٢٠١٨ | العلامة: (١٠٠) درجة
قسم الرياضيات | لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي | الاسم :

جواب السؤال الأول (١٥ درجة):

(في حال كان E حقيقي) : بما أن E^n فضاء خطي ذو n بعد فتوجد قاعدة مكونة من n عنصر وهي $u_1, u_2, \dots, u_n$ وبالتالي $\forall u \in E^n$ فإنه توجد $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R$ بحيث $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$ ويكون $\|u\|_{E^n} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ، وبالتالي من اجل اي عنصر $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ يوجد $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n \in E^n$ ،لنأخذ التطبيق :

$$\varphi : E^n \to R^n : u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n \quad \mapsto \quad \varphi(u) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x$$

فنجد أن هذا التطبيق :

معرف تماماً : لأنه مهما يكن $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n , v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n \in E^n$ بحيث $u = v$ فإن $x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n$ وبالمطابقة نجد أن $i = 1,2 \dots n$ ، $x_i = y_i$ وبالتالي $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ أي أن $\varphi(u) = \varphi(v)$ وبالتالي تحقق الاقتضاء : $u = v \Rightarrow \varphi(u) = \varphi(v)$ فالتطبيق φ معرف تماماً .

خطي : لأنه مهما يكن $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n , v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n \in E^n$ ومهما يكن $\lambda, \mu \in R$ فإن :

$$\varphi(\lambda u + \mu v) = \varphi(\lambda x_1 u_1 + \lambda x_2 u_2 + \dots + \lambda x_n u_n + \mu y_1 u_1 + \mu y_2 u_2 + \dots + \mu y_n u_n) \Rightarrow$$

$$\varphi(\lambda u + \mu v) = \varphi\{(\lambda x_1 + \mu y_1) u_1 + (\lambda x_2 + \mu y_2) u_2 + \dots + (\lambda x_n + \mu y_n) u_n\} \Rightarrow$$

$$\varphi(\lambda u + \mu v) = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \dots, \lambda x_n + \mu y_n) \Rightarrow$$

$$\varphi(\lambda u + \mu v) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots \lambda x_n) + (\mu y_1, \mu y_2, \dots \mu y_n) = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) + \mu(y_1, y_2, \dots, y_n) = \lambda \varphi(u) + \mu \varphi(v)$$

فالتطبيق خطي أي أن $\varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda \varphi(u) + \mu \varphi(v)$

يحافظ على النظيم : لأن $\|u\|_{E^n} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_{R^n} = \|\varphi(u)\|_{R^n}$.

متباين : لأنه مهما يكن $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n , v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n \in E^n$ بحيث

فإن $\varphi(u)=\varphi(v)$ وبالتالي $(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ ، $i=1,2,\ldots n$ ومنه $x_i=y_i$
$x_1u_1+x_2u_2+\ldots+x_nu_n=y_1u_1+y_2u_2+\ldots+y_nu_n$ وبالتالي $u=v$ وبالتالي تحقق الاقتضاء :
$\varphi(u)=\varphi(v) \Rightarrow u=v$ فالتطبيق φ متباين .

غامر : من أجل أي عنصر $x=(x_1,x_2,\ldots x_n)\in R^n$ يوجد عنصر $u=x_1u_1+x_2u_2+\ldots+x_nu_n\in E^n$ بحيث $\varphi(u)=x$. مما سبق نجد أن التطبيق φ إيزومورفيزم من E^n في R^n .

الآن ، لتكن $M\subset E^n$ مجموعة محدودة ولنثبت أنها شبه متراصة ، لتكن $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر M عندئذٍ يكون $u^N=\alpha_1^Nu_1+\alpha_2^Nu_2+\ldots+\alpha_n^Nu_n$ من أجل $N=1,2,\ldots$ حيث $N=1,2,\ldots$ ، $j=1,2,\ldots,n$ ، $\alpha_j^N\in R$ وبما أن $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ عناصر من المجموعة المحدودة

M فإن $N=1,2,\ldots$ ، $\|u^N\|_{E^n}<c$ ، $\exists c>0$ ولكن $\|u^N\|_{E^n}=\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^N)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ وبالتالي

$\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^N)^2\right)^{\frac{1}{2}}<c$ وبالتالي $|\alpha_j^N|\le\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^N)^2\right)^{\frac{1}{2}}<c$ أي أن $|\alpha_j^N|<c$ وذلك أياً كان

$N=1,2,\ldots$ و $j=1,2,\ldots,n$ أي أن المتتالية العددية $\{\alpha_j^N\}_{N=1}^{\infty}$ محدودة في R وذلك أياً كان $j=1,2,\ldots,n$ وحسب مبرهنة فإن هذه المتتالية تملك متتالية جزئية متقاربة ولتكن $\{\alpha_j^{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$

ولتكن α_j^0 نهاية هذه المتتالية أي أن $\lim_{k\to\infty}\alpha_j^{N_k}=\alpha_j^0$ وبالتالي توجد في المتتالية الاختيارية $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ التي أخذناها في البداية من المجموعة M متتالية جزئية هي $\{u^{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث $u^{N_k}=\alpha_1^{N_k}u_1+\alpha_2^{N_k}u_2+\ldots+\alpha_n^{N_k}u_n$ من أجل $k=1,2,\ldots$ وهي متقاربة من العنصر :

$$\lim_{k\to\infty}u^{N_k}=\lim_{k\to\infty}(\alpha_1^{N_k}u_1+\alpha_2^{N_k}u_2+\ldots+\alpha_n^{N_k}u_n)=$$
$$=(\lim_{k\to\infty}\alpha_1^{N_k})u_1+(\lim_{k\to\infty}\alpha_2^{N_k})u_2+\ldots+(\lim_{k\to\infty}\alpha_n^{N_k})u_n=\alpha_1^0u_1+\alpha_2^0u_2+\ldots+\alpha_n^0u_n=u^0$$

أي أن : $\lim_{k\to\infty}u^{N_k}=u^0$ فالمتتالية $\{u^{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ متقاربة ،وبالتالي M شبه متراصة وهو المطلوب

جواب السؤال الثاني (١٥ درجة): لدينا $\|A\|\le|\lambda|$ أياً كان $\lambda\in\sigma(A)$ وبالتالي فإن $r_{\sigma(A)}\le\|A\|$ ولما كان $\sigma(A^n)=[\sigma(A)]^n$ وبما أن $r_{\sigma(A^n)}\le\|A^n\|$ فإن $r_{\sigma(A)}=\sqrt[n]{r_{\sigma(A^n)}}\le\sqrt[n]{\|A^n\|}$ وبالتالي فإن :

$$r_{\sigma(A)} \le \lim_{n\to\infty} \inf \sqrt[n]{\|A^n\|} \le \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

لدينا $\|A\|<|\lambda|$ ، $(A-\lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n$ وبأخذ $\zeta=\frac{1}{\lambda}$ فإن :

$$(A-\lambda I)^{-1} = -\zeta\sum_{n=0}^{\infty}A^n\zeta^n \quad , \quad |\zeta|<\frac{1}{\|A\|}$$

وبما أن كل متسلسة قوى من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty}c_n\zeta^n$ لها نصف قطر تقارب r وتكون هذه المتسلسلة متقاربة عندما $|\zeta|<r$ وإن نصف قطر التقارب هذا يحسب من العلاقة $r=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{|c_n|}}$ وبالتالي وبما أن $\left\|\sum_{n=0}^{\infty}A^n\zeta^n\right\| \le \sum_{n=0}^{\infty}\|A^n\||\zeta|^n$ فتكون هذه السلسة متقاربة إذا كان $|\zeta|<r$ أي أن $|\lambda|=\frac{1}{|\zeta|}>\frac{1}{r}=\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{\|A^n\|}$ وبالتالي فإن التابع $h(\lambda)=(A-\lambda I)^{-1}$ تحليلي في كل نقطة λ_0 من $\rho(A)$ كما أن $h\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\omega(\xi)$ تحليلي في أي مجموعة Δ من المستوي العقدي C وبالتالي فإن نصف قطر التقارب هو r نصف قطر أكبر قرص دائري مفتوح مركزه في المبدا ويقع بأكمله في Δ ويكون $\frac{1}{r}$ نصف قطر أصغر دائرة في المستوي العقدي مركزها في المبدأ وخارجها يقع بأكمله في

$\rho(A)$ وبالتالي فإن : $r_{\sigma(A)} \le \lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{\|A^n\|} \le r_{\sigma(A)}$ وبالتالي $r_{\sigma(A)} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|} = \frac{1}{r}$

جواب السؤال الثالث (١٥+١٠=٢٥ درجة):

ا)- ليكن X فضاء خطي منظم ومتراص أي أن X شبه متراصة وبالتالي من أجل أي عدد $\varepsilon>0$ توجد لـ X شبكة $-\varepsilon$ منتهية ، لنأخذ المتتالية $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث أن $\varepsilon_n>0$ و $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ ، عندئذٍ يوجد لـ X شبكة $-\varepsilon_n$ منتهية وهي N_{ε_n} وذلك أياً كان $n=1,2,...$ أي أنه من أجل أي عنصر $x\in X$ يوجد $y_n\in N_{\varepsilon_n}$ بحيث $\|x-y_n\|<\varepsilon_n$ ، لنضع $N=\bigcup_{n=1}^{\infty}N_{\varepsilon_n}$ فنجد أن هذه المجموعة كثيفة وقابلة للعد إذن الفضاء X فصول .

المجموعة كثيفة لأن : حتى تكون المجموعة N كثيفة يجب أن تكون لصاقتها تساوي الفضاء X كله أي أن تكون كل نقطة $x\in X$ نقطة لاصقة بالمجموعة ، لإثبات ذلك يجب أن نثبت أن أي كرة مفتوحة

مركزها x تتقاطع مع N وهذا واضح ، لتكن $K(x,\varepsilon_n)$ كرة مفتوحة فحسب ما سبق يوجد $y_n \in N_{\varepsilon_n}$ بحيث $\|x-y_n\|<\varepsilon_n$ وهذا يعني أن $y_n \in K(x,\varepsilon_n)$ وبالتالي $y_n \in N_{\varepsilon_n} \cap K(x,\varepsilon_n)$ وبالتالي $y_n \in N \cap K(x,\varepsilon_n)$ وبالتالي $N \cap K(x,\varepsilon_n) \neq \phi$ وبالتالي فإن كل كرة مفتوحة مركزها x تتقاطع مع N وهو المطلوب .

(2)

وواضح أن المجموعة N قابلة للعد لأنها اجتماع قابل للعد لمجموعات منتهية ،فهو فصول. (2)

الفضاء تام لأن : لتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية أساسية من الفضاء X هذا يعني أنه من أجل أي عدد $\varepsilon>0$ يوجد عدد طبيعي $n_0=n_0(\varepsilon)$ بحيث أن $n,m>n_0$ ، $\|x_n-x_m\|<\varepsilon$ وبما أن X متراصة فإنه توجد في المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية جزئية متقاربة من عنصر من X ولتكن $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=x_0\in X$ وبالتالي من أجل أي عدد k يكون : $\|x_k-x_0\|\le\|x_{n_k}-x_k\|+\|x_{n_k}-x_0\|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$ وهذا يعني أن المتتالية الأساسية الاختيارية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة من العنصر $x_0\in X$ وبالتالي X تام ، وهو المطلوب .

(5)

ب)- لنفرض جدلاً $\sigma(A)=\phi$ عندئذ $\rho(A)=C$ وحسب المبرهنة السابقة فإن المؤثر الحلال $R_\lambda(A)$ تحليلي على كل المستوي العقدي C وبالتالي نستنتج حسب التحليل العقدي أن المؤثر $R_\lambda(A)=(A-\lambda I)^{-1}$ هو تابع ثابت أي أن $R_\lambda(A)=(A-\lambda I)^{-1}=const$ وبما أن $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\|R_\lambda(A)\|=0$ فإن $R_\lambda(A)=(A-\lambda I)^{-1}=0$ وهذا غير صحيح كون الفضاء B يحوي عناصر غير الصفر أي أن $B\neq\{0\}$ وبالتالي فإن الفرض الجدلي خاطئ وهو المطلوب .

(5) (5)

جواب السؤال الرابع (٢٠ درجة) :لدينا $\forall x=(\xi_1,\xi_2,\dots)\in\ell_2$ ، $c=1$ ، $\|A_nx\|_{\ell_2}\le c\|x\|_{\ell_2}$ فالمؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة ، وبما أن المؤثر $x\neq0\in X$ ينقل كل مجموعة محدودة M في ℓ_2 المنطلق إلى مجموعة $A_n(M)$ محدودة في فضاء منتهي البعد ($\ell_2^{(n)}$ الإيزومورفي مع C^n) وحسب مبرهنة تكون هذه المجموعة $A_n(M)$ شبه متراصة إذن متتالية المؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متراصة

(5)

نهاية هذه المتتالية $\lim\limits_{n\to\infty}A_nx=\lim\limits_{n\to\infty}(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n,0,0,\dots)=(\xi_1,\xi_2,\dots)=x=Ix$ ومعروف أن المؤثر I غير متراص في الفضاء غير المنتهي البعد (لان تقارب المتتالية $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ من المؤثر I هو تقارب نقطي وليس بانتظام).

(5)

- كي يكون المؤثر مؤثر **إسقاط** يجب أن يحقق $A^*=A$ & $A^2=A$.

وبما أن $I^*=I$ & $I^2=I$ أي تحقق شروط مؤثر الإسقاط اذن المؤثر مؤثر إسقاط .

(5)

كي يكون **مؤثر موجباً** يجب تحقق $\langle Ax,x\rangle\ge0$. لدينا

$$\langle Ix,x\rangle=\left\langle(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n,0,0,\dots\dots),(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots)\right\rangle_{\ell_2}=$$

(5)

$$\xi_1\bar{\xi}_1 + \xi_2\bar{\xi}_2 + ... + \xi_n\bar{\xi}_n + 0 + 0 + ... = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + ... + |\xi_n|^2 \ge 0$$

اي ان المؤثر مؤثر موجبا أيضاً .كي يكون المؤثر **ايزومتري** يجب تحقق $\langle Ax, Ay\rangle_{\ell_2} = \langle x, y\rangle_{\ell_2}$

.وبما أن $A = I$ نجد أن: $\langle Ix, Iy\rangle_{\ell_2} = \langle x, y\rangle_{\ell_2}$ اذن المؤثر ايزومتري .

جواب السؤال الخامس (١٠+١٥=٢٥ درجة):

١)- بما أن A^{-1} موجود وخطي ومحدود عندئذٍ فإن $\lambda = 0 \notin \sigma(A)$ وبالتالي كل عدد $\lambda \in \sigma(A)$ يمكن كتابته بالشكل $\lambda = \frac{1}{\mu}$ حيث μ عدد مناسب ومغاير للصفر .

لنثبت صحة التكافؤ : $\frac{1}{\mu} \notin \sigma(A^{-1}) \Leftrightarrow \mu \notin \sigma(A)$

بفرض $\frac{1}{\mu} \notin \sigma(A^{-1}) \Leftrightarrow$ موجود $\left(A^{-1} - \frac{1}{\mu}I\right)^{-1} \Leftrightarrow$ موجود $\left(-\frac{1}{\mu}A^{-1}(A - \mu I)\right)^{-1} \Leftrightarrow$

$-\mu A(A - \mu I)^{-1}$ موجود $\Leftrightarrow$ $(A - \mu I)^{-1}$ موجود $\Leftrightarrow$ $(A - \mu I)^{-1}$ موجود ومحدود ومعرف على كل الفضاء B $\Leftrightarrow$ $\mu \notin \sigma(A)$ وبالتالي التكافؤ $\frac{1}{\mu} \notin \sigma(A^{-1}) \Leftrightarrow \mu \notin \sigma(A)$ صحيح

وبالتالي التكافؤ التالي صحيح $\frac{1}{\mu} \in \sigma(A^{-1}) \Leftrightarrow \mu \in \sigma(A)$ وهو المطلوب .

٢) - ليكن H فضاء هيلبرت و A مؤثر خطي ومحدود و $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ قاعدتين و $\langle Au_n, v_m\rangle$ عوامل فورييه لـ Au_n بالنسبة للقاعدة $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ ولنفرض أن $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\langle Au_n, v_m\rangle|^2 < \infty$ وحسب مساواة بارسيفال $\|Au_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty}|\langle Au_n, v_m\rangle|^2$ ندعو العدد $N(A) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|Au_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\langle Au_n, v_m\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ **بنظيم هيلبرت شميث** للمؤثر A .

-**(شكل ثنائي الخطية) :** ليكن $L: H \times H \to C : (x, y) \mapsto L(x, y)$ ندعو L شكلاً ثنائيَ الخطية إذا كان من أجل أي $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in H$ وأي $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in H$ يتحقق الشرطان:

1. $L(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 L(x_1, y) + \lambda_2 L(x_2, y)$.

2. $L(x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \overline{\mu_1} L(x, y_1) + \overline{\mu_2} L(x, y_2)$.

و نقول عن ثنائي L الخطية محدود إذا وجد عدد $c > 0$ بحيث يكون $|L(x, y)| \le c\|x\|\|y\|$.

انتهت الإجابات

مدرس المقرر

الدكتور سامح العرجه

حمص ١٦ / ١ / ٢٠١٨ م.